Fonctions d'ambiguïté, groupes de transformations et opérateurs de déplacement temps-fréquence. Partie I

Ambiguity Functions, Groups of Transformations and Time-Frequency Displacement Operators. Part I

par A. BERTHON

IEEA, 13 promenade Paul Doumer, 92400 Courbevoie, aberthon@club-internet.fr

résumé et mots clés

Cette première partie passe en revue les relations qui existent entre fonctions d'ambiguïté et groupes de transformations. On part de la définition première de la fonction d'ambiguïté pour étudier ses généralisations associées à divers types de situations, ainsi que les groupes sur lesquels elles se basent, en particulier on introduit le groupe des transformations bijectives quelconques de l'axe des temps (changements d'horloge), adapté aux cibles ponctuelles de mouvement quelconque, et celui des transformations linéaires du plan temps fréquence, qui seront étudiés dans la seconde partie. On examine dans quel cas la fonction d'ambiguïté détermine entièrement la forme d'onde, et peut être choisie de manière optimale. On montre que les groupes qui permettent de déterminer un domaine d'ambiguïté fini associé à un signal sont à deux paramètres.

Fonctions d'ambiguïté, analyse temps fréquence, transformées, changements d'horloge

abstract and key words

We review in this first part the connections between ambiguity functions and groups of transformations. Starting from the original definition of the ambiguity function we study its generalisations as associated with various situations, as well as their underlying groups, in particular by characterising the group of general bijective transformations of the time axis (warpings), adapted to point-like targets of arbitrary motion, and the group of linear transformations of the time frequency plane, which will be studied in the second part. We address the question of when an ambiguity function completely determines the waveform and may be optimally chosen. It is shown that groups which yield a finite ambiguity domain are two-parameter groups.

Ambiguity functions, time-frequency analysis, transforms, signal warping.

introduction

La fonction d'ambiguïté, étudiée par Woodward [1], est un outil essentiel de la théorie de la détection en radar ou en sonar, qui caractérise les propriétés du signal comme instrument de mesure. Il est désormais bien connu qu'il s'agit d'une fonction coefficient d'une représentation du groupe de Weyl-Heisenberg [2], groupe de transformations engendré par les translations temporelles et fréquentielles. La première généralisation naturelle concerne la mesure de vitesses élevées et d'accélérations [3] ; l'extension aux vitesses élevées introduit naturellement le groupe affine, qui est au coeur de la théorie des ondelettes [4,5] et de la représentation temps-fréquence des signaux réels [6,7]. Les groupes qui s'introduisent sont constitués par les transformations subies par le signal entre l'émission et la réception, dans une situation donnée. Ce sont des groupes d'opérateurs linéaires d'un espace de Hilbert.

La théorie de la réception d'un signal dans un bruit blanc gaussien stationnaire, rappelée dans la section 1, montre que l'estimation des paramètres inconnus qui déterminent la transformation appliquée au signal, donc contiennent l'information recherchée, dépend entièrement des produits scalaires ou hermitiens entre le signal reçu et les différents échos possibles ; ce sont des éléments de matrice (y, Ux) des opérateurs U correspondants, x désignant le signal émis et y le signal reçu ; (y, x) désigne le produit hermitien, linéaire en x et antilinéaire en y, des fonctions complexes de carré sommable.

Il est donc naturel, pour une situation donnée, de considérer un groupe G de transformations qui opèrent sur le signal, et de définir une G-fonction d'ambiguïté qui associe à tout signal d'énergie finie $x(t)$ une fonction complexe définie sur le groupe G par : $\chi_x(\alpha) = (x, U_\alpha x)$, où U_α est l'opérateur associé à l'élément α du groupe. On le suppose unitaire, ce qui signifie que les transformations considérées conservent l'énergie totale du signal (à une constante près, indépendante des paramètres à mesurer). Dans la section 2 on étudie les situations qui se rencontrent en radar ou sonar dans le cas d'une cible ponctuelle ayant un mouvement quelconque Les groupes de transformations associés sont de dimension infinie si on ne fait aucune hypothèse restrictive sur la cinématique des cibles. Dans la section 3 on passe en revue les cas particuliers conduisant à des groupes de dimension finie et les relations qui existent entre leurs fonctions d'ambiguïté respectives. Dans la section 4 on examine la question de savoir dans quel cas la fonction d'ambiguïté détermine entièrement le signal, ce qui permet de choisir la forme d'onde de manière à discriminer au mieux entre deux ensembles de paramètres ; on montre que les groupes qui permettent de caractériser le domaine d'ambiguïté associé à un signal sont à deux paramètres. Dans la section 5 on étudie un exemple d'application.

1. théorie statistique de la mesure

Les signaux considérés ici sont définis par des (classes de) fonctions de carré intégrable. Ceci correspond à l'idée que l'information est portée par une grandeur physique dont le carré est, à un facteur près, la puissance transférée à un récepteur, avec une énergie totale finie. La mesure consiste à émettre un signal $x_0(t)$ dont on recueille l'écho renvoyé par une cible pour en extraire des informations sur celle-ci. Le milieu de propagation et la réflexion sur la cible étant supposés linéaires, le passage du signal émis à l'écho reçu est décrit par un opérateur linéaire borné de l'espace de Hilbert L_2. L'information obtenue dépend des caractéristiques du signal : de sa durée pour une cible en mouvement, de son contenu spectral pour une cible ayant des fréquences de résonance, *etc*. L'énergie totale de l'écho n'est utilisée en général que pour détecter sa présence, seule sa forme faisant l'objet du traitement ; on pourra donc normaliser l'énergie reçue, et représenter les transformations subies par le signal à l'aide d'opérateurs unitaires.

1.1. récepteur idéal

La théorie du récepteur idéal de Woodward [1], qui concerne la mesure des retards et des décalages Doppler, se généralise facilement à un nombre quelconque de paramètres. L'écho est de la forme $x(t, \alpha_0) = U_{\alpha_0} x_0(t)$ où α_0 est un paramètre multidimensionnel à estimer, U_{α_0} l'opérateur unitaire correspondant et x_0 le signal émis ; y est cet écho augmenté d'un bruit blanc gaussien $n(t)$. La fonction de vraisemblance est la probabilité conditionnelle de y relativement à x, soit :

$$P_x(y) = k \, \exp\left(\frac{-1}{N_0}\int (y-x)^2 dt\right) \qquad (1\text{-}1)$$

où N_0 est la puissance du bruit par unité de bande passante. Si $P(x)$ est la probabilité *a priori* du signal x, c'est-à-dire de α_0, l'application du théorème de Bayes donne la probabilité de x après l'observation y, soit :

$$\begin{aligned} P_x(y) &= kP(x)\exp\left(\frac{-1}{N_0}\int (y-x)^2 dt\right) \\ &= K \exp\left(\frac{2}{N_0}\int xy dt\right) \end{aligned} \qquad (1\text{-}2)$$

k et K étant des constantes de normalisation indépendantes de y. La probabilité *a posteriori* que la valeur effective des paramètres soit α est donc proportionnelle à $\exp[q(\alpha)]$ avec :

$$q(\alpha) = \frac{2}{N_0}\int y(t)x(t,\alpha)dt = g(\alpha, \alpha_0) + h(\alpha) \qquad (1\text{-}3)$$

$$g(\alpha,\alpha_0) = \frac{2}{N_0}\int x(t,\alpha_0)x(t,\alpha)dt$$
$$h(\alpha) = \frac{2}{N_0}\int n(t)x(t,\alpha)dt \qquad (1\text{-}4)$$

On montre que la covariance de l'estimateur du maximum de vraisemblance est égale à $(N_0/2E))H^{-1}$, où H est la matrice des dérivées secondes de $g(\alpha)$ en son maximum α_0, et E l'énergie totale des signaux. L'expression de $g(\alpha,\alpha_0)$ montre que, connaissant la distribution de probabilité *a priori* de α, le produit hermitien $(U_\alpha x_0, U_{\alpha_0}x_0)$ détermine entièrement les propriétés statistiques de l'estimateur, en particulier la précision de la mesure (covariance de l'estimateur) et les zones d'ambiguïté (surfaces d'équiprobabilité).

1.2. signaux complexes

La fonction d'ambiguïté de Woodward apparaît lorsqu'on mesure deux paramètres qui représentent un retard et un décalage de fréquence. Cette dernière transformation n'est qu'une approximation, valable pour des signaux à bande étroite, de la transformation induite par une cible de vitesse radiale constante (l'effet Doppler), et elle ne conserve pas le caractère réel des signaux. On est conduit à introduire les signaux analytiques [8] ψ et γ associés respectivement au signaux émis et reçus : leurs transformées de Fourier sont doubles de celles des signaux réels pour les fréquences positives, et nulles ailleurs ; on pose alors $\psi = x_0(t)\exp(2i\pi f_0 t)$ et $\gamma = y(t)\exp(2i\pi f_0 t)$, où f_0 est la fréquence centrale (porteuse). La théorie reste essentiellement la même à condition de supprimer le facteur 2 dans les formules (1-3) et (1-4) et de remplacer la matrice des dérivées secondes H par sa partie réelle ; les fonctions $x(t,\alpha) = U_\alpha x_0(t)$ dans ces formules sont maintenant complexes. La phase de la porteuse n'est pas mesurée en général ; cette phase étant supposée équirépartie, la probabilité *a posteriori* des autres paramètres est une fonction de $|g(\alpha)|$.

1.3. fonctions d'ambiguïté et groupes de transformations

L'estimation de α est donc caractérisée par le produit scalaire $(U_\alpha x_0, U_{\alpha_0}x_0)$. Le cas particulier où α se compose des décalages temporel et fréquentiel conduit à exprimer g à l'aide de la fonction d'ambiguïté $\chi(\tau,\omega)$ dont les arguments sont les composantes de la différence $\alpha-\alpha_0$. Cette réduction est possible parce que les transformations du signal induites par le passage d'une valeur de α à une autre forment un groupe. Cette situation demeure lorsqu'on considère des signaux à large bande et les transformations induites par les décalages temporels et les compressions Doppler, qui engendrent un groupe isomorphe au groupe affine (groupe des transformations affines de la droite réelle, de la forme $t \to at+b$). Dans des situations générales, il est encore naturel de considérer le groupe engendré par les transformations considérées, d'ailleurs on peut toujours imaginer des configurations multi-statiques ou multi-cibles telles que le signal subisse successivement deux transformations données. Pour un groupe G quelconque, on appellera fonction d'ambiguïté généralisée la fonction définie sur G et dépendant du signal x définie par :

$$\chi_x^G(\alpha) = (x, U_\alpha x) \qquad (1\text{-}5)$$

Alors on a :

$$g(\alpha,\alpha_0) = \chi_x^G(\alpha^{-1}\alpha_0) = (U_\alpha x, U_{\alpha_0}x) \qquad (1\text{-}6)$$

On définit de même la fonction d'ambiguïté croisée de deux signaux x,y par $\chi_{xy}^G(\alpha) = (x, U_\alpha y)$. On omettra l'exposant G dans le cas de la fonction d'ambiguïté de Woodward, dont la définition est donnée plus loin par la formule (3-5).

2. cibles ponctuelles : retards et trajectoires

2.1. retards purs

Le signal reçu d'une cible ponctuelle est simplement le signal émis retardé d'une quantité égale à la durée de propagation $d(t)$ subie par le signal qui arrive à l'instant t, c'est-à-dire $x \circ f(t)$ avec $f(t) = t - d(t)$. On suppose que la vitesse de propagation c est constante, et de plus que les vitesses des cibles sont uniformément bornées par une constante inférieure à c. On peut alors préciser la relation entre le temps retardé $f(t)$ et le mouvement de la cible. Soit $r_1(t)$ la distance émetteur-cible et $r_2(t)$ la distance cible-récepteur. En notant $u(t)$ l'instant où le signal reçu en t a été réfléchi par la cible on a :

$$t - u(t) = \frac{r_2[u(t)]}{c} \quad u(t) - f(t) = \frac{r_1[u(t)]}{c} \qquad (2\text{-}1)$$

Les vitesses étant inférieures à c, les équations ci-dessus ont toujours une solution unique. En effet la suite définie par $u_{n+1} = t - \dfrac{r_2(u_n)}{c}$ est de Cauchy et converge vers une solution de l'équation. On peut dire aussi que la fonction $I + \dfrac{r_2}{c}$ (où I désigne l'identité, $I(t) = t$) est bijective et croissante donc inversible ; le temps retardé est donné par :

$$f(t) = (I + \frac{r}{c})^{-1}(t)$$
$$f(t) = (I - \frac{r}{c}) \circ (I + \frac{r}{c})^{-1}(t) = 2(I + \frac{r}{c})^{-1}(t) - I(t) \qquad (2\text{-}2)$$
$$f(t) = (I - \frac{r_1}{c}) \circ (I + \frac{r_2}{c})^{-1}(t)$$

respectivement pour une configuration passive (la cible est l'émetteur et $r := r_1$), une configuration monostatique (émetteur et récepteur confondus, $r := r_1 = r_2$) et une configuration bistatique. Supposons pour simplifier une configuration monostatique, avec un émetteur au repos. *A priori* on devrait se limiter au semi-groupe des bijections qui vérifient $f(t) < t$ mais il est aussi naturel d'admettre des valeurs négatives de $r(t)$, pour lesquelles $f(t) > t$, en posant que l'instant d'émission et l'instant de retour sont respectivement le min et le max de t et $f(t)$. Dès lors on a une structure de groupe, fournie par la composition des applications f. L'opérateur unitaire associé sur l'espace des signaux est défini par :

$$V_f x(t) = \left(\frac{df}{dt}\right)^{\frac{1}{2}} x[f(t)] \tag{2-3}$$

C'est un opérateur de changement d'horloge. Inversement chacun de ces opérateurs est associé à une trajectoire possible, car pour toute bijection croissante $f(t)$ on peut remonter à la fonction $r(t)$ par l'équation $r \circ u(t) = c\frac{[t - f(t)]}{2}$, du fait que $u(t) = \frac{t - f(t)}{2}$ est bijective. Les bijections croissantes sont dérivables presque partout et on a :

$$|\dot{r} \circ u(t)| = c\left|\frac{1 - \dot{f}(t)}{1 + \dot{f}(t)}\right| < c \tag{2-4}$$

donc la vitesse radiale est majorée par c. Si au lieu du temps retardé $f(t)$, pour lequel la loi de groupe est simplement la composition des fonctions, on introduit la fonction retard $\tau(t) = t - f(t) = 2[u(t) - f(t)]$, la loi de groupe devient $\tau \circ \tau'(t) = \tau'(t) + \tau[t - \tau'(t)]$.

2.2. cas particulier : mouvement à vitesse radiale constante

Le sous-groupe à un paramètre le plus simple du groupe des changements d'horloge est celui des translations du temps, qui correspond aux trajectoires des cibles fixes $r(t) = Cte$. Les cibles de vitesse radiale constante $(|v| < c)$ déterminent un sous-groupe à deux paramètres, où l'on a : $r(t) = vt + d$ et $u(t) = t - \frac{\frac{v}{c}t + \frac{d}{c}}{1 + \frac{v}{c}}$ ou $\tau(t) = 2\frac{vt + d}{c + v}$. La composition des mouvements caractérisés par les paramètres (v, d) et (v', d') donne $(v, d)(v', d') = (v'', d'')$,

avec $$v'' = \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}} \quad d'' = \frac{d + d' - \frac{v}{c}d' + \frac{v'}{c}d}{1 + \frac{v}{c}\frac{v'}{c}} \tag{2-5}$$

où l'on retrouve logiquement la loi relativiste d'addition des vitesses, puisqu'on relie des distances aux retards subis par des signaux se propageant à la vitesse c. Le groupe des opérateurs correspondants est isomorphe au groupe affine ***A*** engendré par les translations et compressions, la fonction d'ambiguïté dite en compression qui lui est associée est définie par :

$$\chi_x^A(k, b) = k^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} x[k(t + b)]x(t)dt \tag{2-6}$$

avec un coefficient de compression $k = \frac{c - v}{c + v}$ et un décalage temporel $b = \frac{-2d}{(c - v)}$, qui s'obtiennent en écrivant $f(t) = k(t + b)$. La généralisation naturelle qui consisterait à considérer des polynômes du second degré comme fonctions retards $\tau(t)$ est exclue, car pour ces fonctions la vitesse de la cible n'est pas bornée. On montre dans le paragraphe suivant qu'elle retrouve un sens lorsqu'on fait l'approximation des signaux à bande étroite.

2.3. signaux à bande étroite

Si le signal est à bande étroite : $\psi(t) = x \exp(2i\pi f_0 t)$ où x est un signal de largeur de bande $W << f_0$, on peut négliger l'effet de la variation du retard sur l'amplitude x et écrire : $U_f \psi(t) \approx x(t - \tau_0)\exp[2i\pi f_0(t - \tau(t))]$ à condition que les retards vérifient l'inégalité forte : $|\tau(t) - \tau_0|W << 1$ pour toutes les valeurs de t pour lesquelles l'amplitude du signal reçu $x(t - \tau)$ n'est pas négligeable. Il faut introduire une durée du signal T car cette inégalité ne peut pas être satisfaite sur une durée quelconque dans un cas aussi simple que celui du mouvement rectiligne uniforme. L'approximation revient à considérer que l'amplitude x est affectée d'un décalage qui ne varie pas pendant la durée d'illumination de la cible. La condition peut s'écrire $d\tau/dtWT << 1$, ce qui est sensiblement équivalent à $vWT << c$ pour des cibles dont la vitesse est très petite devant c. Si le produit durée bande passante est grand et la vitesse non négligeable devant c la fonction d'ambiguïté en compression ne peut plus être assimilée à celle de Woodward [9].

La transformation unitaire est alors définie par la donnée d'un retard central τ_0 et d'une fonction $\delta\tau(t) = \tau(t) - \tau_0$ qui est un infiniment petit par rapport à W^{-1}. La loi de composition devient, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur :

$$(\tau_0', \delta\tau'(t)) \cdot (\tau_0, \delta\tau(t)) = (\tau_0' + \tau_0, \delta\tau'(t) + \delta\tau(t - \tau_0')) \tag{2-7}$$

Pour toute fonction φ on peut poser : $P_\varphi x(t) = x(t)e^{-i\varphi(t)}$. On voit que l'approximation « bande étroite » consiste à remplacer l'opérateur U_f par un opérateur unitaire agissant sur x, qui est : $P_\varphi T_{-\tau_0} x(t) = x(t-\tau_0)e^{-i\varphi(t)}$, avec $\varphi(t) = 2\pi f_0[\tau_0 + \delta\tau(t)]$; T_τ désigne la translation dans le temps (formule (3-1)). Les opérateurs de la forme $P_\varphi T_\tau$ forment un groupe, la loi de composition pour le couple (τ, φ) étant : $(\tau', \varphi'(t))(\tau, \varphi(t)) = (\tau + \tau', \varphi'(t) + \varphi(t - \tau'))$. On peut définir une fonction d'ambiguïté du signal $x(t)$, fonction de l'élément $(\tau_0, \delta\tau)$ du groupe, par :

$$\chi_x^G(\tau, \varphi) = (x, P_\varphi T_\tau x) = \int x^*(t)x(t-\tau)e^{-i\varphi(t)}dt \quad (2\text{-}8)$$

Elle dépend d'un retard et d'une fonction quelconque du temps, définie sur l'intervalle de temps où l'approximation bande étroite est valable. C'est une généralisation de la formule qui donne la fonction d'ambiguïté de Woodward ; dans cette formule (3-5) ωt représente un déphasage dû à l'effet Doppler ($\omega = 2\pi f_0 v_r / c$, où v_r est la vitesse radiale) ; il est ici remplacé, à une constante près, par une « histoire de phase » plus générale $2\pi f_0 \delta\tau(t)$.

Lorsque $\delta\tau$ est une fonction linéaire du temps on retrouve évidemment les décalages fréquentiels comme approximation de la contraction Doppler. Plus généralement, la loi d'addition (2-7) fait que les retards dont la dépendance en t est un polynôme de degré $\leqslant n$ constituent un sous-groupe G_n. Pour autant que les termes d'ordre supérieur à n soient négligeables, la fonction d'ambiguïté $\chi_x^{G_n}$, qui dépend de $(n+2)$ paramètres, gouverne donc l'estimation du retard et de ses n premières dérivées. Les conditions de validité de cette analyse sont les suivantes : on suppose que le retard peut être développé sous la forme : $\delta\tau(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n + \varepsilon_n t_{n+1}$, l'origine des temps étant telle que la réception du signal se fasse dans l'intervalle $(0, T)$. On doit avoir simultanément : $|\alpha_p| << \left[T^{p-1}(WT)\right]^{-1}$ pour $p = 0, \ldots, n$ et $|\varepsilon_n| << [T^n(f_0)]^{-1}$, c'est-à-dire que les coefficients mesurés sont astreints à des limites d'autant plus petites que la durée du signal est plus longue, et que le premier terme négligé doit avoir une contribution $\varepsilon_n T^{n+1}$ plus faible que les précédents dans un rapport W/f_0 approximativement.

2.4. cas des milieux dispersifs

Si la vitesse de propagation, au lieu d'être constante, est une fonction $c(\omega)$ de la pulsation, par linéarité et en décomposant le signal émis suivant ses composantes de Fourier, on voit que pour une cible ponctuelle on peut définir une distance $D(t,\omega)$ par l'équation : $r(t - \dfrac{D(t,\omega)}{c(\omega)}) = D(t,\omega)$ qui a toujours une racine unique si la vitesse de la cible est inférieure à $c(\omega)$. À chaque pulsation correspond un retard $\dfrac{D(t,\omega)}{c(\omega)}$, le signal reçu est alors :

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{x}_0(\omega) \exp[i\omega(t - \frac{D(t,\omega)}{c(\omega)})]d\omega \quad (2\text{-}9)$$

si $\hat{x}_0(\omega)$ est la transformée de Fourier du signal émis

2.5. exemple

La figure 1 ci-dessous illustre le cas d'une trajectoire ne passant pas par l'origine et parcourue avec une vitesse v constante, soit, en appelant d la distance de passage : $r(t) = \sqrt{v^2t^2 + d^2}$

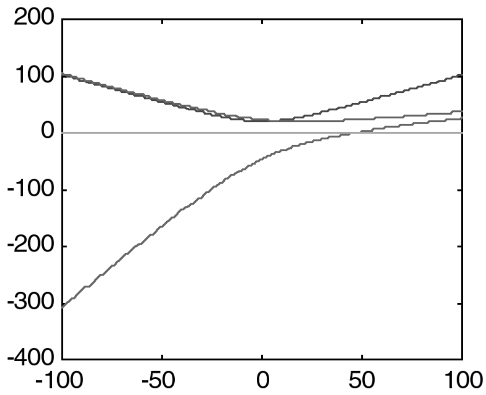

Figure 1. – Distances et retards pour une cible de vitesse constante.

On a pris une vitesse égale à $c/2$ et une distance de passage égale à $20c$ unités de temps. Les abscisses sont graduées en unité de temps. La courbe bleue représente la distance, la verte le temps de parcours aller, la rouge l'instant retardé, donné par

$$f(t) = t - \tau(t) = t - 2\frac{\sqrt{v^2t^2 + (1-v^2)d^2} - v^2 t}{1 - v^2} \quad (2\text{-}10)$$

La figure 2 montre l'écho reçu, en vert, lorsque le signal émis, en bleu, est gaussien, centré à l'instant 0, de demi-largeur égale à $5c$ unités de temps.

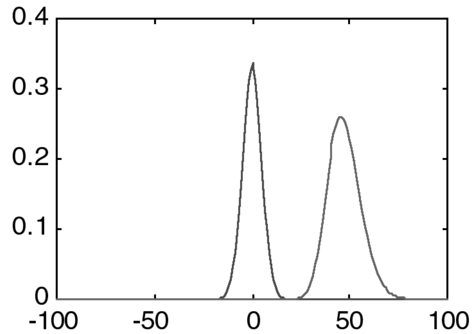

Figure 2. – Signal gaussien et son écho.

3. groupes de transformations unitaires et fonctions d'ambiguïté

Les situations répertoriées jusqu'ici conduisent à introduire différents groupes d'opérateurs unitaires ; les fonctions d'ambiguïté associées n'ont d'intérêt pratique que si elles dépendent d'un nombre fini de paramètres, donc si les conditions sont suffisamment restrictives pour que le groupe des transformations à considérer soit de dimension finie.

3.1. groupes à un paramètre

1) (cibles ponctuelles fixes) ***T*** groupe des translations du temps. L'opérateur associé à un élément du groupe, c'est-à-dire à un décalage temporel a, est donné par :

$$T_a x(t) = x(t+a) \qquad (3\text{-}1)$$

La loi du groupe est évidemment l'addition, il est commutatif. La fonction d'ambiguïté associée est la fonction d'auto-corrélation du signal.

2) (cibles ponctuelles de vitesse radiale constante et signaux à bande étroite) ***D*** groupe des décalages Doppler, isomorphe au précédent, l'opérateur associé au décalage de pulsation b est défini par :

$$D_b x(t) = e^{-ibt} x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{x}(\omega + b) e^{i\omega t} d\omega \qquad (3\text{-}2)$$

La fonction d'ambiguïté associée est l'auto-corrélation du signal dans le domaine fréquentiel.

3) (cibles ponctuelles à vitesse radiale uniforme, signaux quelconques) : ***S*** groupe des compressions ou changements d'échelle, définies, avec k réel positif, par :

$$S_k x(t) = k^{\frac{1}{2}} x(kt) \qquad (3\text{-}3)$$

La fonction d'ambiguïté est donnée par la formule (3-7) avec retard nul $(a = 0)$.

4) (cibles ponctuelles avec accélération, signaux à bande étroite) : ***Q*** groupe des multiplications par un terme de phase quadratique, c'est-à-dire modulations linéaires de fréquence. L'opérateur est :

$$Q_\lambda x(t) = e^{-\frac{i}{2}\lambda t^2} x(t) \qquad (3\text{-}4)$$

Un retard dépendant quadratiquement du temps est une approximation, valable pour une durée finie, du retard induit par une cible d'accélération radiale constante pendant cette durée.

3.2. groupes à deux paramètres

En combinant deux des groupes précédents on obtient les deux groupes suivants, qui fournissent les fonctions d'ambiguïté classiques.

5) ***WH*** : le groupe de Weyl-Heisenberg est le groupe engendré par les deux premiers cités, dont les opérations ne commutent pas entre elles mais presque : $T_a D_b = \exp(-iab) D_b T_a$.Un élément de ***WH*** est un triplet (u, a, b) constitué d'un décalage temporel a, d'un décalage Doppler b et d'un déphasage u avec la loi de groupe : $(u, a, b)(u', a', b') = (u + u' + \dfrac{ab' - a'b}{2}, a + a',$ $b + b')$. Les transformations unitaires définies par : $WH_{u,a,b} = \exp(iu + \dfrac{ab}{2}) T_a D_b$ forment une représentation du groupe. La fonction d'ambiguïté de Woodward est définie par :

$$\begin{aligned}\chi_x(\tau, \omega) &= \int x^*(t - \frac{\tau}{2}) x(t + \frac{\tau}{2}) e^{-i\omega t} dt = (T_{-\frac{\tau}{2}} x, D_\omega T_{\frac{\tau}{2}} x) \\ &= (x, WH_{0,\tau,\omega} x)\end{aligned} \qquad (3\text{-}5)$$

On peut remarquer qu'elle ne correspond pas à la définition (1-5), qui exigerait une fonction de trois paramètres $\chi_x^{WH}(u, \tau, \omega) = (x, WH_{u,\tau,\omega} x) = \exp(iu) \chi_x(\tau, \omega)$. Elle est définie en fait sur le plan temps-fréquence, et on sait que sa transformée de Fourier bi-dimensionnelle est la représentation de Wigner-Ville du signal x ; bien que le groupe ***WH*** ne soit pas commutatif il est parfois intéressant d'assimiler le plan temps fréquence au plan complexe. Ainsi on peut poser, pour $z = a + ib$: $V_z = WH_{0,a,b}$, de sorte que $\chi_x(a, b) = (x, V_z x)$; mais ces opérateurs ne forment pas une représentation du groupe additif des nombres complexes. L'intégrale sur le plan du module carré d'une fonction d'interambiguïté vaut :

$$\begin{aligned}\int |\chi_{xy}(\tau, \omega)|^2 d\tau d\omega &= 2\pi \int \left| x(t - \frac{\tau}{2}) \right|^2 \left| y(t + \frac{\tau}{2}) \right|^2 d\tau dt \\ &= 2\pi ||x||^2 ||y||^2\end{aligned} \qquad (3\text{-}6)$$

6) ***A*** : le groupe affine est engendré par les compressions et les translations ; on a $S_k T_a = T_{a/k} S_k$, si on pose $A_{ka} = T_a S_k$ la loi de composition est celle des matrices de la forme $\begin{pmatrix} \frac{1}{k} & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La fonction d'ambiguïté associée est la fonction d'ambiguïté en compression [6]. Elle a pour expression :

$$\chi_x^A(k, a) = k^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} x[k(t + a)] x(t) dt \qquad (3\text{-}7)$$

3.3. groupes à une infinité de paramètres

7) (cibles ponctuelles de trajectoire quelconque) ***CH*** groupe des changements d'horloge, c'est le groupe (au sens de la composi-

tion des applications) des fonctions continues et strictement croissantes de la droite réelle sur elle-même, et si f en est un élément l'opérateur associé est défini par :

$$U_f x(t) = \left(\frac{df^{-1}}{dt}\right)^{\frac{1}{2}} x[f^{-1}(t)] \qquad (3\text{-}8)$$

On notera en comparant à la définition (2-3) que $U_f = V_{f^{-1}}$. La présente définition permet de composer les opérateurs dans le même sens que les éléments du groupe, $U_f U_g = U_{f \circ g}$. Le groupe ***CH*** contient évidemment comme sous-groupes ***T*** et le groupe affine, T_a s'obtient pour $f(t) = t - a$ et A_{ka} pour $f(t) = k^{-1}t - a$.

8) (signaux à bande étroite) ***P*** groupe des déphasages quelconques, définis par une fonction $\varphi(t)$ et les opérateurs tels que :

$$(P_\varphi x)(t) = e^{-i\varphi(t)} x(t) \qquad (3\text{-}9)$$

D et ***Q*** en sont des sous-groupes.

9) (cibles ponctuelles fixes, milieu dispersif) ***RG*** groupe des transformations qui conservent la densité spectrale et multiplient la transformée de Fourier par une fonction de module 1. L'opérateur correspondant à une telle fonction φ est donné par :

$$(RG_\varphi x)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{x}(\omega) \exp[i\omega t - i\varphi(\omega)] d\omega \qquad (3\text{-}10)$$

La dispersion introduit à une fréquence donnée un retard de groupe égal à l'opposé de la dérivée de la fonction φ.

3.4. un groupe à trois paramètres : SL(2,R)

Un fait remarquable est que les transformations des groupes à un paramètre ***S*** et ***Q*** se traduisent, pour la fonction d'ambiguïté de Woodward, par un simple changement de variables ; c'est aussi le cas pour la transformation de Fourier ; en effet, soit **F** l'opérateur unitaire qui à x fait correspondre sa transformée de Fourier :

$$\mathbf{F}x(t) = \hat{x}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int x(t') e^{itt'} dt'. \qquad (3\text{-}11)$$

Il est clair qu'en transmuant les opérateurs U d'un groupe par la transformation de Fourier on obtient un groupe isomorphe au précédent, formé des opérateurs $\mathbf{F}^{-1}U\mathbf{F}$ qui consistent à appliquer U à la transformée de Fourier du signal. On a notamment :

$$\mathbf{F}^{-1} D_b \mathbf{F} = T_b \quad \mathbf{F}^{-1} T_a \mathbf{F} = D_{-a} \quad \mathbf{F}^{-1} S_k \mathbf{F} = S_{\frac{1}{k}} \qquad (3\text{-}12)$$

$$\mathbf{F}^{-1} WH_{u,a,b} \mathbf{F} = WH_{u,b,-a} \qquad (3\text{-}13)$$

Par ailleurs en transmuant les opérateurs d'un groupe par ceux d'un autre on obtient les relations suivantes :

$$S_k^{-1} T_a S_k = T_{ka} \qquad S_k^{-1} D_b S_k = D_{\frac{b}{k}}$$

$$Q_\lambda^{-1} T_a Q_\lambda = e^{-i\frac{\lambda}{2}a^2} D_{\lambda a} T_a \quad Q_\lambda^{-1} D_b Q_\lambda = D_b \qquad (3\text{-}14)$$

On en déduit, en appliquant la définition des éléments de ***WH*** :

$$S_k^{-1} WH_{u,a,b} S_k = WH_{u,ka,\frac{b}{k}}$$

$$Q_\lambda^{-1} WH_{u,a,b} Q_\lambda = WH_{u,a,b+\lambda a} \qquad (3\text{-}15)$$

Les formules (3-13) et (3-15) montrent que l'action de l'opérateur équivaut, comme annoncé, à une transformation linéaire des arguments de la fonction d'ambiguïté, soit :

$$\begin{aligned} \chi_{S_k x}(a,b) &= (S_k x, WH_{0,a,b} S_k x) = (x, S_k^{-1} WH_{0,a,b} S_k x) \\ &= (x, WH_{0,ka,\frac{b}{k}} x) = \chi_x(ka, \frac{b}{k}) \end{aligned} \qquad (3\text{-}16)$$

et de même $\chi_{\hat{x}}(a,b) = \chi_x(b,-a)$ et $\chi_{Q_\lambda x}(a,b) = \chi_x(a, b + \lambda a)$. Toutes ces transformations linéaires du plan temps fréquence conservent l'élément de surface, étant de la forme $(a,b) \to (\alpha a + \beta b, \gamma a + \delta b)$ avec $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Si on pose $g^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, en appelant U_g l'opérateur unitaire tel que $\chi_{U_g x}(a,b) = \chi_x(\alpha a + \beta b, \gamma a + \delta b)$, un calcul simple montre qu'au produit de deux opérateurs correspond le produit des deux matrices : $U_g U_{g'} = U_{gg'}$ (l'ordre serait changé si on avait posé $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$). Or les matrices correspondant à S, Q et **F** engendrent tout le groupe $\mathbf{SL(2,R)}$ des matrices réelles 2×2 de déterminant unité [10, 12] de sorte qu'on peut définir l'opérateur U_g pour chaque matrice g, et qu'on obtient ainsi une représentation de $\mathbf{SL(2,R)}$. Par exemple, la formule (3-13) montre que la transformation de Fourier représente une rotation de $\pi/2$ (de l'argument de la fonction d'ambiguïté) dans le plan temps fréquence, on a : $\chi_{\hat{x}}(a,b) = \chi_{\hat{x}}(b,-a)$ soit $g = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ces transformations permettent de déformer la fonction d'ambiguïté par des opérations simples, c'est ce qu'utilise la compression d'impulsion. Le problème plus général de construire un signal ayant, pour un certain groupe de transformations, une fonction d'ambiguïté donnée, est examiné dans le paragraphe suivant.

4. signaux de fonction d'ambiguïté donnée

Remarquons d'abord que, si les transformations subies par le signal engendrent toujours un groupe, les transformations auxquelles on s'intéresse peuvent n'en former qu'un sous-ensemble qui ne soit pas un groupe. Ainsi, comme dans l'exemple du paragraphe 2.5, on peut supposer que la cible est en mouvement rectiligne uniforme d'orientation quelconque et chercher à déterminer v et d ; mais les lois de retard de la forme (2-9), qui sont celles de ces mouvements, ne forment pas un groupe.

Si les paramètres à mesurer sont ceux des transformations d'un groupe G, le choix d'une forme d'onde passe, idéalement, par le choix de sa G-fonction d'ambiguïté ; on peut chercher à ajuster la résolution dans les différents paramètres mesurés selon certaines priorités, à repousser les régions d'ambiguïté là où la probabilité a priori est faible, *etc*.. Il faut alors savoir dans quel cas la fonction d'ambiguïté détermine complètement le signal. Intuitivement il faut pour cela que les transformées ou échos de tout signal x forment une famille dont les combinaisons linéaires finies sont partout denses, c'est-à-dire que tout écho reçu puisse être approché d'aussi près qu'on veut en moyenne quadratique par une somme d'échos du type considéré. Ceci implique que la représentation de G par des opérateurs unitaires soit irréductible. En effet supposons qu'un sous-espace E de l'espace de Hilbert soit stable pour tous les opérateurs de la représentation ; comme la représentation est unitaire, le supplémentaire orthogonal F est également stable et, pour tout signal $x = y + z$ avec $y \in E$ et $z \in F$ on a : $\chi_x^G(\alpha) = \chi_y^G(\alpha) + \chi_z^G(\alpha)$ en appliquant la définition (1-9). Mais alors pour tout nombre complexe m de module 1 on voit que le signal $y + mz$ a la même fonction d'ambiguïté que x.

Le groupe $\boldsymbol{T}$ des translations ne remplit pas cette condition ; on sait qu'on ne peut pas remonter au signal connaissant seulement sa fonction d'auto-corrélation, qui est ici la fonction d'ambiguïté associée au groupe. La représentation n'est pas irréductible, puisque la famille des fonctions dont la transformée de Fourier s'annule dans un domaine donné est invariante par translation.

Lorsque la représentation est irréductible on peut préciser le mécanisme par lequel on remonte de la fonction d'ambiguïté au signal. On suppose que le groupe G de transformations adapté à la situation est de dimension finie et localement compact, alors on peut définir une intégrale sur le groupe par rapport à une mesure de Haar $d\mu(\alpha)$ invariante à gauche. On appelle admissible [4] un signal x_0 tel que l'intégrale du carré de sa fonction d'ambiguïté soit bornée :

$$\begin{aligned}\textstyle\int_G \left|\chi_{x_0}^G\right|^2 d\mu &= \textstyle\int (x_0, U_\alpha x_0)(U_\alpha x_0, x_0) d\mu(\alpha)\\ &= k_{x_0} ||x_0||^2 < \infty\end{aligned} \qquad (3\text{-}17)$$

Lorsque la mesure de Haar est aussi invariante à droite (le groupe est dit unimodulaire) , si un signal est admissible tous le sont et la formule d'inversion qui fait passer de la fonction d'ambiguïté au signal est une simple généralisation de celle qui s'appplique à la fonction d'ambiguïté de Woodward. Les démonstrations sont données dans l'appendice A. Pour le groupe affine $\boldsymbol{A}$, qui n'est pas unimodulaire (c'est le seul parmi les groupes localement compacts de la section précédente), tous les signaux ne sont pas admissibles. D'autre part la représentation n'est pas irréductible, elle laisse invariants les deux espaces de signaux analytiques, c'est-à-dire ayant une transformée de Fourier nulle pour les valeurs négatives (resp. positives) de ω. Donc, alors que les transformations du groupe $\boldsymbol{A}$ conservent le caractère réel des signaux, pour avoir une bonne correspondance entre fonction d'ambiguïté et signal il faut travailler sur les signaux analytiques, qui sont complexes. On n'échappe pas aux nombres complexes. La condition d'admissibilité s'écrit [4] :

$$\int_0^\infty |\hat{x}(\omega)|^2 \frac{d\omega}{\omega} < \infty \qquad (3\text{-}18)$$

Lorsqu'aucun signal n'est admissible c'est, intuitivement, que le groupe est trop étendu ; par exemple, pour le groupe $\boldsymbol{WH}$ à trois paramètres, le module de la fonction d'ambiguïté étant indépendant de la phase u, l'intégrale du premier membre de (3-17) diverge toujours. On verra un autre exemple dans le paragraphe 5.

Il est donc possible dans certains cas, connaissant la fonction d'ambiguïté, de retrouver le signal. Reste qu'évidemment cette fonction ne peut pas être choisie arbitrairement ; comment reconnaître qu'une fonction donnée définie sur le groupe G est une fonction d'ambiguïté ? Sous des hypothèses assez générales un théorème apporte la réponse [11] : il faut et il suffit qu'elle soit de type positif, une condition qui généralise celle du théorème de Bochner pour les fonctions d'auto-corrélation, mais n'est pas forcément facile à vérifier. Cette condition édicte que, pour toute fonction continue f définie sur le groupe :

$$\iint_{G\times G} \chi_x^G(\alpha^{-1}\beta) f(\alpha)^* f(\beta) d\mu(\alpha) d\mu(\beta) \geqslant 0 \qquad (3\text{-}19)$$

Sa nécessité est évidente puisque, sous réserve que les intégrales convergent, le premier membre est le carré de la norme L_2 du signal défini par l'intégrale $\int_G f(\alpha)(U_\alpha x) d\mu(\alpha)$.

5. exemple : mesure distance-vitesse-accélération

Pour des signaux à bande étroite et en configuration monostatique, si le retard peut s'écrire, pour $|t|$ assez petit, sous la forme $\tau(t) = \tau_0 + \dot{\tau} t + \frac{1}{2}\ddot{\tau} t^2$, au troisième ordre près le mouvement de la cible est à accélération radiale constante, $r(t) = r_0 + \dot{r}(t + \frac{\tau_0}{2}) \; + \frac{1}{2}\ddot{r}(t + \frac{\tau_0}{2})^2$; en identifiant les développements à partir de (2-1) on trouve $r_0 = c\frac{\tau_0}{2}, \; \dot{r} = c\frac{\dot{\tau}}{2-\dot{\tau}}$ et $\ddot{r} = \frac{4c\,\ddot{\tau}(2+\dot{\tau})}{(2-\dot{\tau})^3}$. Comme on l'a vu au paragraphe 2.3, l'écho se déduit du signal par la transformation :

$$(U_{uav\gamma}x)(t) = x(t-a)e^{-2i\pi f_0(u+a+vt+\frac{1}{2}\gamma t^2)} \quad \text{(3-20)}$$

avec $a := \tau_0$, $u = 0$, $v := \dot{\tau}$ et $\gamma := \ddot{\tau}$. Le groupe G à considérer est le groupe engendré par ***WH*** et ***Q***, avec la loi de composition :

$$\begin{aligned}&(u', a', v', \gamma')(u, a, v, \gamma)\\ &= (u + u' - va' + \frac{1}{2}\gamma a'^2, a + a', v + v' - \gamma a', \gamma + \gamma')\end{aligned} \quad \text{(3-21)}$$

On remarque que, à la phase près, on a : $U_{uav\gamma} = Q_{2\pi f_0 \gamma}WH_{(0,-a,2\pi f_0 v)}$, soit pour la G-fonction d'ambiguïté du signal x :

$$\begin{aligned}\chi_x^G(a, v, \gamma) &= (Q_{-\lambda}x, WH_{(0,-a,2\pi f_0 v)}x)\\ &= \chi_{Q_{-\lambda}}xx(-a, 2\pi f_0 v)\end{aligned} \quad \text{(3-22)}$$

avec $\lambda := 2\pi f_0\gamma$. C'est une fonction d'inter-ambiguïté de Woodward. On constate que les matrices jacobiennes des variables du produit (3-21) par rapport à (u, a, v, γ) comme à (u', a', v', g') sont de déterminant unité, donc la mesure de Lebesgue $dudadvd\gamma$ est invariante à gauche et à droite, le groupe est unimodulaire. Mais, compte tenu de la formule (3-6) :

$$\int \left|\chi_{Q_{-\lambda}xx}(a, 2\pi f_0 v)\right|^2 dadv = \frac{1}{f_0}||Q_{-\lambda}x||^2||x||^2 = \frac{1}{f_0}||x||^4 \quad \text{(3-23)}$$

expression dont l'intégrale par rapport à γ diverge. La condition d'admissibilité n'est donc pas remplie. On peut vérifier sur un exemple que, dans l'espace des trois variables, les domaines délimités par une valeur donnée de la fonction d'ambiguïté ne sont pas bornés. Considérons un signal gaussien $x(t) = (\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$. La fonction d'ambiguïté a pour module carré :

$$\begin{aligned}&\left|\chi_x^G\right|^2(a, v, \gamma)\\ &= \frac{2}{(4+\omega_0^2\gamma^2\sigma^4)^{\frac{1}{4}}}\exp\left[-\frac{2a^2 + \omega_0^2\sigma^4(2v + a\gamma)^2}{\sigma^2(4+\omega_0^2\gamma^2\sigma^4)}\right]\end{aligned} \quad \text{(3-24)}$$

Dans l'espace des trois paramètres a, v, γ les surfaces d'égale ambiguïté sont du quatrième degré (en négligeant l'influence du facteur devant l'exponentielle) ; si on fixe le retard a, leurs sections dans le plan vitesse accélération sont des hyperboles, ce qui montre que dans l'estimation de ces deux paramètres il y a toujours ambiguïté avec des solutions à très grandes vitesse et accélération. Naturellement dans une situation pratique on dispose de bornes *a priori* sur les vitesses et les accélérations des cibles, qui limitent en fait le domaine d'ambiguïté.

6. conclusions

La notion de fonction d'ambiguïté est intimement liée à celle de groupe de transformations ; la définition classique de Woodward, basée sur les translations temps-fréquence, peut donc se généraliser en introduisant d'autres groupes que celui de Weyl-Heisenberg. On en a présenté plusieurs exemples, dont celui des transformations générales qui correspondent à la réflexion d'un signal par une cible ponctuelle ; ce sont des transformations ponctuelles, en ce sens qu'elles consistent essentiellement à changer l'argument de la fonction qui représente le signal. L'exercice trouve ses limites dans le fait que peu de situations simples correspondent à un groupe de transformations ayant un petit nombre de paramètres, or la fonction d'ambiguïté associée à un groupe est surtout utile lorsque sa connaissance permet de remonter au signal . Le choix se restreint alors essentiellement à des groupes à deux paramètres, le groupe affine ou, pour les signaux à bande étroite, les translations temps fréquence. L'exemple d'un groupe de transformations non ponctuelles est fourni par l'action du groupe $\mathbf{SL(2,R)}$ qui consiste à effectuer un changement de variable linéaire dans les arguments de la fonction d'ambiguïté classique. On examinera dans la deuxième partie les propriétés de toutes ces transformations en tant qu'opérateurs de déplacement temps fréquence.

Appendice A

La condition (3-17) équivaut à ce que l'opérateur défini par $A_{x_0}x = \int(x_0, U_\alpha^{-1}x)U_\alpha x_0 d\mu(\alpha)$ soit borné ; en effet $(x, A_{x_0}x) = \int|(x, U_\alpha x_0)|^2 d\mu(\alpha)$ donc si l'opérateur est borné l'intégrale converge, notamment pour $x = x_0$, d'où (3-17). Inversement si elle converge pour $x = x_0$ elle converge aussi pour les transformés de ce signal par toutes les opérations du groupe, qui sont denses dans l'espace entier d'après l'hypothèse d'irréductibilité. En effet, à cause de l'invariance de la mesure, l'opérateur A_{x_0} commute avec tous les U_α :

$$\begin{aligned}U_\beta^{-1}A_{x_0}U_\beta x &= \int(x_0, U_\alpha^{-1}U_\beta x)U_\beta^{-1}U_\alpha x_0 d\mu(\alpha)\\ &= \int(x_0, U_{\beta^{-1}\alpha}^{-1}x)U_{\beta^{-1}\alpha}x_0 d\mu(\alpha) = A_{x_0}x\end{aligned} \quad \text{(A-1)}$$

donc c'est un multiple de l'identité en vertu du lemme de Schur [10, Appendice A], de sorte que, pour tout couple de signaux, on a :

$$(y, A_{x_0}x) = \int_G (y, U_\alpha x_0)(x, U_\alpha x_0)^* d\mu(\alpha) = k_{x_0}(y, x) \quad \text{(A-2)}$$

Cette formule établit une isométrie de l'espace des signaux sur l'espace des fonctions d'inter-ambiguïté avec le signal x_0, muni du produit hermitien des fonctions de carré intégrable sur le groupe G. Ces fonctions forment un espace de Hilbert à noyau reproduisant, car :

$$\begin{aligned}\chi^G_{yx_0}(\alpha) = (y, U_\alpha x_0) &= \frac{(y, A_{x_0}U_\alpha x_0)}{k_{x_0}} \\ &= \frac{\int_G (U_\alpha^{-1}y, U_\beta x_0)(x_0, U_\beta x_0)^* d\mu(\beta)}{k_{x_0}} \\ &= \int_G \chi^G_{yx_0}(\gamma)\frac{\chi^G_{x_0}(\alpha^{-1}\gamma)^*}{k_{x_0}} d\mu(\gamma)\end{aligned} \quad \text{(A-3)}$$

du fait de l'invariance de la mesure de Haar. Le noyau reproduisant est, à un facteur près, la G-fonction d'ambiguïté de x_0 . Le coefficient s'obtient en particularisant l'égalité (A-2) :

$$k_{x_0} = \frac{\int_G \left|\chi^G_{x_0}(\alpha)\right|^2 d\mu(\alpha)}{||x_0||^2} \quad \text{(A-4)}$$

De la même manière, si x est aussi admissible, le lemme de Schur entraîne :

$$\int_G \chi^G_{yx_0}(\alpha)\chi^G_{zx}(\alpha) d\mu(\alpha) = k_{x_0x}(y, z) \quad \text{(A-5)}$$

On peut obtenir x en exprimant son produit hermitien avec un vecteur quelconque de l'espace à l'aide de la fonction d'ambiguïté. Pour cela on particularise (A-5) :

$$k_{x_0x}(y, x) = \int_G \chi^G_{yx_0}(\alpha)\chi^G_x(\alpha)^* d\mu(\alpha) \quad \text{(A-6)}$$

puis on écrit, en utilisant (A-5) et $\chi^G_{U_\alpha^{-1}xx}(\beta) = (U_\alpha^{-1}x, U_\beta x) = \chi^G_x(\alpha\beta)$:

$$\chi^G_{xx_0}(\alpha) = (x_0, U_\alpha^{-1}x)^* = \frac{1}{k_{x_0x}{}^*}\int_G \chi^G_{x_0}(\beta)^*\chi^G_x(\alpha\beta) d\mu(\beta) \quad \text{(A-7)}$$

On reporte alors cette égalité dans (A-6) en prenant y égal à x et il vient :

$$|k_{x_0x}|^2 \, ||x||^2 = \int_{G\times G} \chi^G_{x_0}(\beta)^*\chi^G_x(\alpha\beta)\chi^G_x(\alpha)^* d\mu(\beta)d\mu(\alpha) \quad \text{(A-8)}$$

ce qui donne le module de k_{x_0x}, d'où, à une phase constante près :

$$(y, x) = \frac{||x|| \int_G \chi^G_{yx_0}(\alpha)\chi^G_x(\alpha)^* d\mu(\alpha)}{\left|\int_{G\times G} \chi^G_{x_0}(\beta)^*\chi^G_x(\alpha\beta)\chi^G_x(\alpha)^* d\mu(\beta)d\mu(\alpha)\right|^{\frac{1}{2}}} \quad \text{(A-9)}$$

En égalant y et x on obtient la norme de x et une formule qui détermine x à une phase arbitraire près, et ne dépend que de sa fonction d'ambiguïté :

$$(y, x) = \frac{\int_G \chi^G_{xx_0}(\alpha)\chi^G_x(\alpha)^* d\mu(\alpha) \int_G \chi^G_{yx_0}(\alpha)\chi^G_x(\alpha)^* d\mu(\alpha)}{\int_{G\times G} \chi^G_{x_0}(\beta)^*\chi^G_x(\alpha\beta)\chi^G_x(\alpha)^* d\mu(\beta)d\mu(\alpha)} \quad \text{(A-10)}$$

La positivité du dénominateur résulte de la remarque qui suit l'équation (3-19).

Lorsque la mesure de Haar est aussi invariante à droite (le groupe est dit unimodulaire) on peut remplacer α par son inverse dans les intégrales ci-dessus, et en remplaçant α par $\beta^{-1}\alpha\beta$ on voit que, si x_0 est admissible, $U_\beta x_0$ l'est également, de sorte que tous les signaux le sont. Alors on a, en appliquant (A-5) :

$$\begin{aligned}k_{x_0x}(y, z) &= \int_G \chi^G_{yx_0}(\alpha^{-1})\chi^G_{zx}(\alpha^{-1})^* d\mu(\alpha) \\ &= \int_G \chi^G_{x_0y}(\alpha)^*\chi^G_{xz}(\alpha)^* d\mu(\alpha) = k^*_{yz}(x_0, x)^*\end{aligned} \quad \text{(A-11)}$$

et, ceci étant vrai pour quatre signaux quelconques, il s'ensuit que $k_{xy} = K(y, x)$, où K est une constante réelle. On peut utiliser la formule d'inversion :

$$\int \chi^G_{x_1x_2}(\alpha)\chi^G_x(\alpha) d\mu(\alpha) = K(x_2, x)^*(x_1, x) \quad \text{(A-12)}$$

Cette formule ressemble à la formule classique qui permet de retrouver le signal à partir de sa fonction d'ambiguïté de Woodward ; lorsque les signaux x_1 et x_2 tendent, au sens des distributions, vers des mesures de Dirac en t_1 et t_2, on retrouve bien la formule :

$$x(t_2)^*x(t_1) = \frac{1}{2\pi}\int \chi_x(t_1 - t_2, \omega) e^{i\omega\frac{t_1+t_2}{2}} d\omega \quad \text{(A-13)}$$

qui donne directement la valeur du signal, à une phase globale près, en faisant, par exemple, $t_2 = 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Woodward, « Probability and Information Theory with Applications to Radar », Artech House, 1980

[2] W. Schempp, « Harmonic Analysis on the Heisenberg nilpotent Lie Group with Applications to Signal Theory », Longman, 1986

[3] E.J. Kelly, R.P. Wishner, « Matched-filter Theory for High-Velocity, Accelerating Targets », IEEE Trans. Military Electronics , janvier 1965

[4] A. Grossmann, J. Morlet, « Decomposition of Hardy Functions into Square Integrable Wavelets of Constant Shape » SIAM J. Math. Anal. vol. 15, n°4, juillet 1984

[5] Wavelets : Time Frequency Methods and Phase Space. Springer Verlag, 1989 J.M. Combes, A. Grossmann, Ph. Tchamichian, ed.

[6] G. Jourdain, « Synthèse de signaux certains dont on connaît la fonction d'ambiguïté de type Woodward ou de type en compression » Ann. Télécomm. 32, 19-23 , 1977

[7] J. Bertrand, P. Bertrand, J.-P. Ovarlez, « Compression d'impulsion en large bande », Douzième colloque GRETSI, 1989

[8] J. Ville, « Théorie et application de la notion de signal analytique. Câble et transmission », vol. 2, n°1, 1948

[9] G. Jourdain, J.-P. Henrioux, « Use of large bandwidth-duration binary phase shift keying signals in target delay Doppler measurements ». JASA vol. 90, n°1, pp. 299-3009, 1991

[10] S. Lang, $SL_2(R)$. Springer, 1985

[11] J. Dieudonné, « Élements d'analyse », Chapitre XXII. Gauthier-Villars, 1976.

Manuscrit reçu le 18 décembre 2000

L'AUTEUR

André BERTHON

André BERTHON, ancien élève de l'École Normale Supérieure, agrégé de mathématiques (1964), docteur d'État es sciences physiques (1970), chercheur au CNRS en physique des hautes énergies (1964-1973), ingénieur d'études puis Directeur Scientifique, Société AERO (1974-1998), actuellement IEEA. Intérêts principaux : électromagnétisme, traitement du signal.